

CHƯƠNG II

DÒNG CHẢY ỔN ĐỊNH KHÔNG ĐỀU TRONG KÊNH
(A steady, non-uniform flow)

Làm thế nào biết được đường mực nước (đmn) sẽ thay đổi ra sao dọc theo dòng chảy trong kênh. Qua chương này, sẽ hình dung được và xác định chính xác đmn tăng hay giảm độ sâu dọc theo dòng chảy.

Cơ sở tính toán theo năng lượng thay đổi dọc theo dòng chảy. Do đó để xét sự biến đổi mực nước chủ yếu là tính các phương trình vi phân.

2.1 NHỮNG KHÁI NIỆM

2.1.1 Dòng chảy không đều

Xuất hiện dòng chảy không đều khi:

- ◆ Về mặt động lực học, khi lực cản và trọng lực không cân bằng nhau.
- ◆ Các đường dòng không song song nhau.
- ◆ Vận tốc trung bình tại hai mặt cắt kế tiếp nhau không bằng nhau.

Nguyên nhân làm cho dòng chảy không đều xảy ra khi:

- a) Kênh có độ dốc bằng không ($i = 0$) hoặc độ dốc nghịch ($i < 0$).
- b) Đối với kênh có độ dốc thuận ($i > 0$), có nhiều nguyên nhân, trong thực tế thường gặp nhất là:

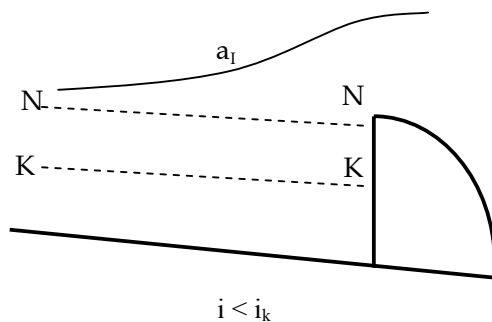
- Có chướng ngại trên lòng dẫn, ví dụ như đập tràn (**Hình 2-1**), bậc nước.
- Sự thay đổi độ dốc kênh dọc theo dòng chảy.
- Kích thước và hình dạng mặt cắt thay đổi dọc theo dòng chảy.

Nghiên cứu dòng chảy không đều hay còn gọi là đường mực nước không đều, quan trọng nhất là cần biết quy luật thay đổi của chiều sâu mực nước dọc theo dòng chảy.

$$h=f(l)$$

Có 2 dạng chuyển động không đều:

Dòng chảy không đều thay đổi dần và dòng chảy không đều thay đổi gập.



Hình 2-1

2.1.2 Kênh lắng trụ và phi lắng trụ

Lòng dẫn được chia ra làm 2 loại:

- ◆ **Kênh lắng trụ** có hình dạng, kích thước của mặt cắt ướt không thay đổi dọc theo lòng kênh:

$$W= f(h), \text{ trong đó: } h = f(l).$$

nên:
$$\frac{dW}{dl} = \frac{\partial W}{\partial h} \frac{dh}{dl} \tag{2-1}$$

- ◆ **Kênh phi lắng** có hình dạng, kích thước của mặt cắt ướt thay đổi dọc theo lòng kênh:

$$W= f(h, l), \text{ trong đó: } h = f(l).$$

nên:
$$\frac{dW}{dl} = \frac{\partial W}{\partial l} + \frac{\partial W}{\partial h} \frac{dh}{dl} \tag{2-2}$$

2.2 NĂNG LƯỢNG ĐƠN VỊ CỦA MẶT CẮT (*Specific energy*)

Năng lượng đơn vị của dòng chảy tại mặt cắt bất kỳ, đối với trục chuẩn (0-0) là:

$$E = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{\alpha.v^2}{2g} \tag{2-3}$$

Tại một mặt cắt, bất kỳ điểm nào trên đó đều có năng lượng là như nhau. Xét hai điểm: 1 và A1. Tại mặt cắt (1-1), ta có:

$$E = z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{\alpha_1.v_1^2}{2g} = a_1 + h_1 + \frac{\alpha_1.v_1^2}{2g} \tag{2-4}$$

Nếu dời mặt chuẩn (0-0) lên A1, năng lượng đơn vị của dòng chảy tại (1-1) sẽ là:

$$\varepsilon_1 = h_1 + \frac{\alpha_1.v_1^2}{2g} \tag{2-5}$$

Tương tự, tại mặt cắt (2 - 2), ta có:

$$E_2 = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{\alpha_2.v_2^2}{2g} = a_2 + h_2 + \frac{\alpha_2.v_2^2}{2g} \tag{2-6}$$

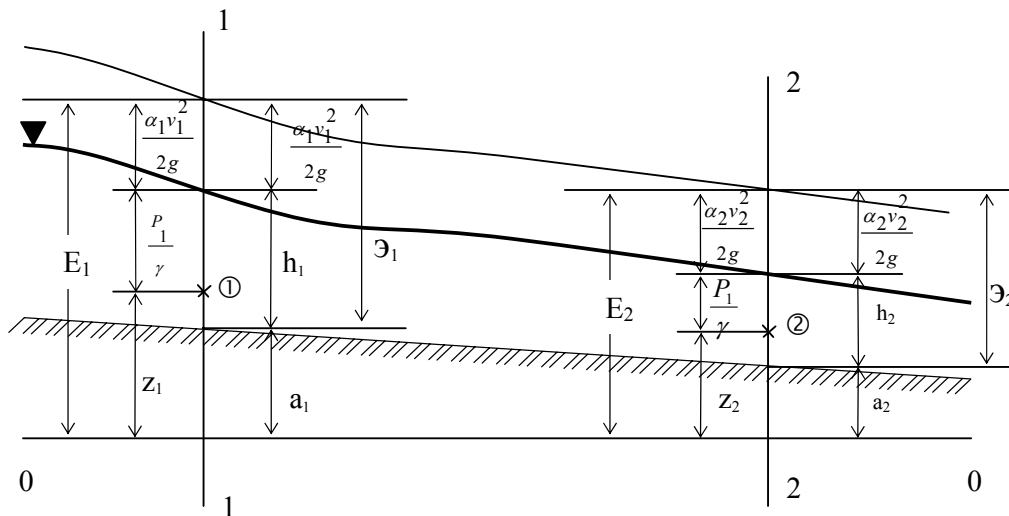
và

$$\varepsilon_2 = h_2 + \frac{\alpha_2.v_2^2}{2g} \tag{2-7}$$

Từ các công thức (2-5) và (2-7) ta có thể viết dưới dạng tổng quát như sau:

$$\varepsilon = h + \frac{\alpha.v^2}{2g} \tag{2-8}$$

Đại lượng ε gọi là năng lượng đơn vị của mặt cắt, được định nghĩa:



Hình 2-2

“Năng lượng đơn vị của mặt cắt là năng lượng của một đơn vị trọng lượng chất lỏng của dòng chảy tại một mặt cắt nhất định tính đối với mặt chuẩn nằm ngang đi qua điểm thấp nhất của mặt cắt ấy”.

Ta có: $v = \frac{Q}{W}$ thay vào (2-8), ta được:

$$\varepsilon = h + \frac{\alpha.Q^2}{2gW^2} \tag{2-9}$$

Bây giờ ta xét xem ϑ thay đổi như thế nào dọc theo dòng chảy, từ các công thức (2-3) đến (2-8), ta có thể rút ra:

$$\vartheta = E - a \tag{2-10}$$

Ta lấy đạo hàm theo l , ta được:

$$\frac{d\vartheta}{dl} = \frac{dE}{dl} - \frac{da}{dl} \tag{2-11}$$

Ta lại có: $\frac{dE}{dl} = -J$ (2-12)

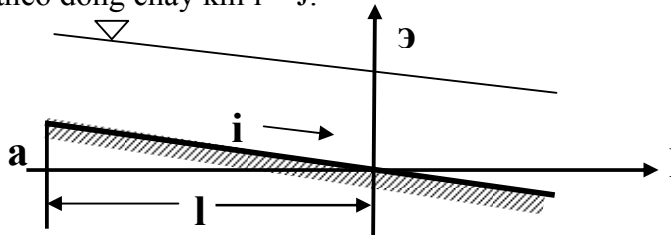
$$\frac{da}{dl} = -i \tag{2-13}$$

Thay (2-12) và (2-13) vào (2-11), nên ta có:

$$\frac{d\vartheta}{dl} = i - J \tag{2-14}$$

Từ công thức (2-14), ta thấy:

- ϑ tăng theo dòng chảy khi $i > J$.
- ϑ giảm theo dòng chảy khi $i < J$.
- ϑ không đổi dọc theo dòng chảy khi $i = J$.



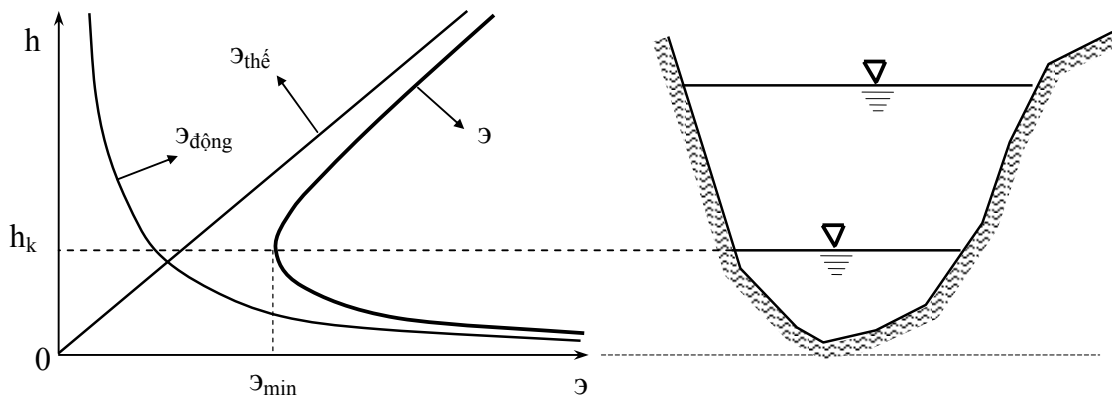
Ta biết rằng E luôn luôn giảm dọc theo dòng chảy, còn ở đây ϑ thay đổi tùy thuộc vào quan hệ i và J . Nghĩa là ϑ phụ thuộc vào sự tương quan giữa lực cản và trọng lực. Mặt khác phụ thuộc diện tích mặt cắt, hay ta có:

$$\vartheta = \vartheta(h, l); h = h(l)$$

2.3 ĐỘ SÂU PHÂN GIỚI (Critical depth)

2.3.1 Định nghĩa về độ sâu phân giới

Ta xét xem, tại một mặt cắt nhất định, ϑ sẽ thay đổi như thế nào theo h . (Hình 3-2)



Hình 2-3

Do dòng chảy ổn định nên $Q = \text{const}$, còn diện tích mặt cắt là hàm số của h , nên ϑ cũng là hàm số của h . Nên ta có thể viết:

$$\vartheta = h + \frac{\alpha}{2g} \frac{Q^2}{W_k^2} = f(h)$$

Nếu ta đặt: $\vartheta_{th\acute{e}} = h$ (2-15)

và $\vartheta_{đ\grave{o}ng} = \frac{\alpha}{2g} \frac{Q^2}{W_k^2}$ (2-16)

Rõ ràng, $\vartheta_{th\acute{e}}$ đồng biến với h , còn $\vartheta_{đ\grave{o}ng}$ thì nghịch biến với h .

Vậy: $\vartheta = \vartheta_{th\acute{e}} + \vartheta_{đ\grave{o}ng}$ (2-17)

Lúc $h \rightarrow 0$ thì $\vartheta_{th\acute{e}} \rightarrow 0$, còn $\vartheta_{đ\grave{o}ng} \rightarrow \infty$, do đó: $\vartheta \rightarrow \infty$

Lúc $h \rightarrow \infty$ thì $\vartheta_{th\acute{e}} \rightarrow \infty$, còn $\vartheta_{đ\grave{o}ng} \rightarrow 0$, do đó: $\vartheta \rightarrow \infty$

Như vậy trên đồ thị hàm số ϑ sẽ có hai nhánh tiến đến vô cùng. Lúc $h \rightarrow \infty$ đường ϑ nhận đường $\vartheta_{th\acute{e}} = h$ làm đường tiệm cận xiên. Lúc $h \rightarrow 0$ thì đường ϑ nhận trục hoành làm đường tiệm cận ngang. Nên ϑ sẽ nhận một giá trị cực trị nhỏ nhất, ứng với độ sâu nhất định gọi là độ sâu phân giới h_k .

$$\vartheta_{min} = h_k + \frac{\alpha}{2g} \frac{Q^2}{W_k^2}$$

trong đó: W_k diện tích ứng với độ h_k

Vậy có thể định nghĩa độ sâu phân giới: “Với một lưu lượng đã cho và tại một mặt cắt xác định, độ sâu nào làm cho năng lượng đơn vị của mặt cắt ấy có trị số nhỏ nhất thì độ sâu đó là độ sâu phân giới”.

Ta thấy $h_k = f(Q, W)$; không phụ thuộc n và i

- Khi $h > h_k$ thì $\frac{d\vartheta}{dh} > 0$; ϑ đồng biến với h , nên dòng chảy êm.
- Khi $h < h_k$ thì $\frac{d\vartheta}{dh} < 0$; ϑ nghịch biến với h , nên dòng chảy xiết.

2.3.2 Cách xác định h_k

Cách thứ 1: Căn cứ vào định nghĩa ta vẽ quan hệ $\vartheta = f(h)$, ta dùng phương pháp thử dần theo công thức (2-9), tìm ra giá trị h sao cho ϑ_{min} , đó là h_k cần tìm.

Cách thứ 2: Tìm công thức giải tích tính h_k

Ta biết: khi $h = h_k$ thì ϑ_{min} ; hay $\frac{d\vartheta}{dh} = 0$ khi $h = h_k$

Lấy đạo hàm (2-9), ta được:

$$\frac{d\vartheta}{dh} = \frac{d}{dh} \left(h + \frac{\alpha.Q^2}{2gW^2} \right) = 1 - \frac{\alpha.Q^2}{gW^3} \frac{\partial W}{\partial h}$$

Lấy gần đúng ta lại có: $\frac{\partial W}{\partial h} = B$ (2-18)

Nên: $\frac{d\vartheta}{dh} = 1 - \frac{\alpha.Q^2}{gW^3} B = 0$ (2-19)

Vậy: $\frac{\alpha.Q^2}{g} = \frac{W_k^3}{B_k}$ (2-20)

a. Cách tìm h_k dạng tổng quát

Ta có: Q tính được giá trị của $\frac{\alpha Q^2}{g}$

- Giả định h tính W và B ; suy ra $\frac{W^3}{B}$

- Theo công thức (2-20), ta so sánh $\frac{\alpha Q^2}{g}$ và $\frac{W^3}{B}$. Khi hai giá trị bằng nhau thì h tương ứng chính là h_k .

Để cho việc tính toán được nhanh và sau này có thể sử dụng, ta có thể lập thành bảng hoặc vẽ đồ thị quan hệ $\frac{W^3}{B}$ và h.

b. Tính h_k đối với mặt cắt hình chữ nhật

Ta có: $B_k = b$; $W_k = bh_k$

Thay các giá trị trên vào (2-20), ta được:

$$\frac{\alpha Q^2}{g} = \frac{b^3 h_k^3}{b} = b^2 h_k^3$$

Nên:
$$h_k^3 = \frac{\alpha}{g} \left(\frac{Q}{b} \right)^2$$

Đặt :
$$q = \frac{Q}{b} \tag{2-21}$$

Ở đó :

q: gọi là lưu lượng đơn vị, m^2/s

Vậy ta được:
$$h_k = \sqrt[3]{\frac{\alpha \cdot q^2}{g}} \tag{2-22}$$

c. Tính h_k đối với mặt cắt hình thang

Ta có: $B_k = b + 2mh_k$; $W_k = (b + mh_k)h_k$

Thay các giá trị trên vào (2-20), ta được:

$$\frac{\alpha Q^2}{g} = \frac{W_k^3}{B_k} = \frac{(b + mh_k)^3 h_k^3}{b + 2mh_k} = \frac{b^3 h_k^3 \left(1 + \frac{mh_k}{b}\right)^3}{b \left(1 + 2\frac{mh_k}{b}\right)}$$

Đặt:
$$\sigma_T = \frac{mh_k}{b}$$

và
$$\sigma_N = \frac{mh_{kCN}}{b}$$

Lập tỉ số hai công thức trên ta được :

$$\frac{\sigma_T}{\sigma_N} = \frac{h_k}{h_{kCN}}$$

công thức trên cũng có thể viết lại :

$$h_k = \frac{\sigma_T}{\sigma_N} h_{kCN} \tag{2-23}$$

Ở đó :

σ_T là hệ số đặc trưng hình dạng mặt cắt hình thang;

σ_N là hệ số đặc trưng hình dạng mặt cắt hình chữ nhật;

Giả sử mặt cắt chữ nhật có cùng chiều rộng b với hình thang và cùng lưu lượng, nên độ sâu phân giới mặt cắt chữ nhật tương ứng ta có thể viết:

$$h_{kCN}^3 = \frac{\alpha}{g} \left(\frac{Q}{b} \right)^2 \tag{2-24}$$

Thay các giá trị trên vào biến đổi, ta được:
$$\sigma_N = \frac{\sigma_T(1 + \sigma_T)}{\sqrt[3]{1 + 2\sigma_T}} \quad (2-25)$$

Xác định độ sâu phân giới theo công thức (2-23), cần tính h_{kCN} theo (2-24) và $\frac{\sigma_T}{\sigma_N}$ theo (2-25). Tuy nhiên để tính được $\frac{\sigma_T}{\sigma_N}$ theo (2-25) là bài toán đúng dần, từ (2-24) tính h_{kCN} , rồi thay vào (*) ta tính σ_N sau đó mới dùng công thức (2-25) để tìm σ_T .
 Để đơn giản Agorôtskin dựa đề nghị công thức:

$$h_k = \left(1 - \frac{\sigma_N}{3} + 0,105\sigma_N^2\right) h_{kCN} \quad (2-29)$$

d. Mặt cắt hình tròn.

Từ các công thức (1-61) và (1-64) trong chương 1, tính diện tích và chiều rộng mặt thoáng về mặt cắt hình tròn chảy lưng ống, thay vào (2-20) rút gọn ta được :

$$\frac{\alpha.Q^2}{g.d^5} = \frac{k_w^3}{\sin \theta} = h_k(\theta) \quad (2-30)$$

Để xác định độ sâu phân giới hình tròn h_k có 2 cách:

Cách thứ 1: Từ (2-30) dùng cách thử dần tìm θ hay s , cách này có thể lập trình hay dùng những phần mềm tính toán như Mathcad.

Cách thứ 2: Khi dùng máy tính tay, ta lập bảng tra theo công thức:

$$\frac{k_w^3}{\sin \theta} = h_k(\theta) \quad (2-30a)$$

Có thể tham khảo bảng tra trong **Phụ lục 1-3**.

Khi tính toán, ta có lưu lượng Q và đường kính ống d , tính theo công thức

$$h_k(\theta) = \frac{\alpha.Q^2}{g.d^5} \quad (2-30b)$$

Từ đó tra bảng tìm được s , sau đó tính độ sâu phân giới theo công thức:

$$h_k = s.d \quad (2-31)$$

2.4 ĐỘ DỐC PHÂN GIỚI (Critical slope)

2.4.1 Định nghĩa

Trong một kênh lăng trụ, dẫn một lưu lượng xác định thì độ dốc nào tại của kênh tạo nên dòng chảy đều có độ sâu bằng độ sâu phân giới ($h_0 = h_k$), độ dốc đó gọi là độ dốc phân giới, kí hiệu i_k

2.4.2 Cách xác định i_k

Theo định nghĩa trên, ta thay $h_0 = h_k$ vào công thức (1-10), ta được

$$Q = W_k C_k \sqrt{R_k i_k} \quad (2-32)$$

Từ công thức trên tìm được i_k

$$i_k = \frac{Q^2}{W_k^2 . C_k^2 . R_k} \quad (2-32a)$$

2.4.3 Tính chất của độ dốc phân giới

Trong dòng chảy, nếu lưu lượng là hằng số ($Q = \text{const}$), ta thấy:

- $i = i_k$ thì $h = h_k$; lúc đó dòng đều bằng độ sâu phân giới.
- $i > i_k$ thì $h_0 < h_k$; lúc đó dòng đều nhỏ hơn độ sâu phân giới.

- $i < i_k$ thì $h_0 > h_k$; lúc đó dòng đều lớn hơn độ sâu phân giới.

2.5 TRẠNG THÁI CHẢY (*Type of flows*)

- Quan sát dòng chảy ta thấy:
 - Khi $h = h_k$: dòng chảy ở trạng thái chảy phân giới (*critical flow*).
 - Khi $h > h_k$: dòng chảy ở trạng thái chảy êm (*tranquil flow*).
 - Khi $h < h_k$: dòng chảy ở trạng thái chảy xiết (*rapid flow*).
- Tiêu chuẩn phân biệt trạng thái chảy :

Đặt:
$$Fr = \frac{\alpha Q^2}{g \omega^3} B \quad (2-40)$$

Fr là hệ số Froude
và thay vào (2-19), ta được:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial h} = 1 - Fr \quad (2-41)$$

Do đó ta thấy:

- $Fr = 1$ hay $\frac{\partial \vartheta}{\partial h} = 0$ thì $h = h_k$: dòng chảy ở trạng thái phân giới.
- $Fr < 1$ hay $\frac{\partial \vartheta}{\partial h} > 0$ thì $h > h_k$: dòng chảy ở trạng thái chảy êm.
- $Fr > 1$ hay $\frac{\partial \vartheta}{\partial h} < 0$ thì $h < h_k$: dòng chảy ở trạng thái chảy xiết.

Từ (2-40) có thể viết dưới dạng:

$$Fr = \frac{\alpha Q^2}{g \omega^2 \frac{\omega}{B}} = \frac{\alpha v^2}{g h_{tb}} = 2 \frac{\alpha \cdot v^2}{2g h_{t,b}}$$

Nên:
$$Fr = 2 \frac{dn}{tn} \quad (2-42)$$

Như vậy ta có thể nhận xét về các trạng thái chảy liên quan với động lực học:

- Chảy phân giới khi $Fr = 1$ hay $2dn = tn$.
- Chảy êm khi $Fr < 1$ hay $2dn < tn$.
- Chảy xiết khi $Fr > 1$ hay $2dn > tn$.

Với mặt cắt chữ nhật ta có:

$$Fr = \frac{\alpha}{g} \cdot \frac{v^2}{h} \quad (2-43)$$

Khi $Fr_k = 1$ thì ta được:

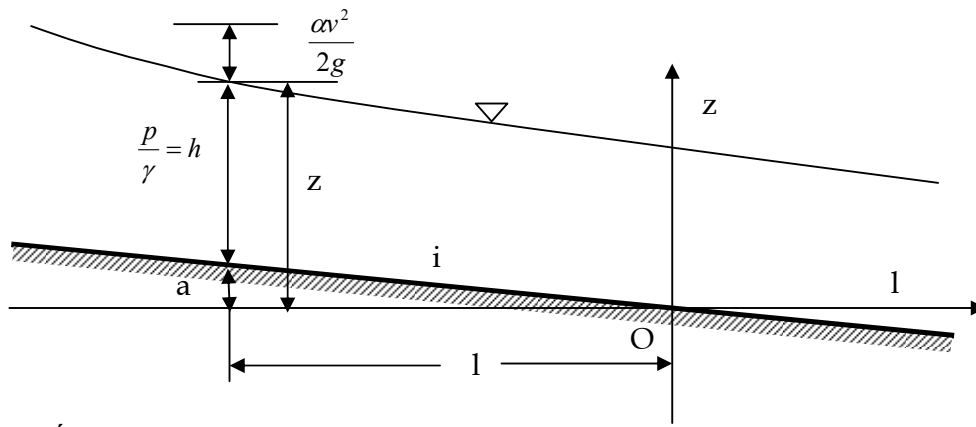
$$v_k = \sqrt{gh_k} \quad (2-44)$$

2.6 PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CƠ BẢN CỦA DÒNG CHẢY ỔN ĐỊNH THAY ĐỔI DẦN.

2.6.1 Phương trình dạng thứ 1

Chọn trục tọa độ zOL, xét năng lượng tại điểm bất kỳ trong dòng chảy ta có:

$$E = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{\alpha \cdot v^2}{2g}$$



Lấy đạo hàm năng lượng dọc theo dòng chảy, ta được:

$$\frac{dE}{dl} = \frac{d}{dl} \left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{\alpha \cdot v^2}{2g} \right)$$

Theo dòng chảy đều ổn định ta có:

$$\frac{dE}{dl} = -J \tag{2-45}$$

Xét năng lượng tại mặt thoáng chất lỏng, thì ta có: $\frac{p_a}{\gamma} = \text{const}$, giải phương trình đạo hàm trên ta được:

$$-\frac{dz}{dl} = \frac{d}{dl} \left(\frac{\alpha \cdot v^2}{2g} \right) + J \tag{2-46}$$

Đây là phương trình biểu diễn sự thay đổi cao trình mực nước trong dòng chảy ổn định thay đổi dần. Được nghiên cứu đối với kênh thiên nhiên.

2.6.2 Phương trình dạng thứ 2

Lấy đạo hàm như trên nhưng nếu xét đến năng lượng đơn vị tại mặt cắt thì ta cũng có công thức như (2-14) là :

$$\frac{d\vartheta}{dl} = i - J \tag{2-47}$$

2.6.3 Phương trình dạng thứ 3

Đối với kênh phi lăng trụ, thì $W=f(l,h)$ theo (2-9) nên $\vartheta = f(l, h)$ và $h=f(l)$, phương trình vi phân toàn phần của năng lượng đơn vị là

$$d\vartheta = \frac{\partial \vartheta}{\partial l} dl + \frac{\partial \vartheta}{\partial h} dh$$

Phương trình trên có thể viết :

$$\frac{d\vartheta}{dl} = \frac{\partial \vartheta}{\partial l} + \frac{\partial \vartheta}{\partial h} \frac{dh}{dl} \tag{2-48}$$

Đạo hàm phương trình (2-9) dọc theo l, ta có :

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial l} = -\frac{\alpha \cdot Q^2}{g \cdot W^3} \frac{\partial W}{\partial l}$$

Thay phương trình trên và các phương trình (2-41), (2-47) vào (2-48) biến đổi ta được :

$$\frac{dh}{dl} = \frac{i - J + \frac{\alpha Q^2}{gW^3} \frac{\partial W}{\partial l}}{1 - Fr} \quad (2-48a)$$

Đây là phương trình tổng quát đúng cho mọi loại kênh.

Đối với kênh lăng trụ có: $W = f(h)$, nên: $\frac{\partial W}{\partial l} = 0$ thay vào (2-48), ta có thể viết theo độ dốc thủy lực và hệ số Fr là :

$$\frac{dh}{dl} = \frac{i - J}{1 - Fr} \quad (2-48b)$$

Giải phương trình trên tìm được quy luật biến đổi h theo l.

2.7 CÁC DẠNG ĐƯỜNG MẶT NƯỚC TRONG KÊNH LĂNG TRỤ

Để xác định được các dạng đường mực nước (đmn), ta sử dụng các công thức (2-14) và (2-48a). Trong tính toán, cần phải biết được qui luật biến thiên của các dạng đường mực nước hay biến thiên miền nghiệm của các phương trình vi phân này.

2.7.1 Khái niệm chung.

- Nếu mực nước có độ sâu tăng dần gọi là đường nước dâng: $\frac{dh}{dl} > 0$.
- Nếu mực nước có độ sâu giảm dần gọi là đường nước hạ: $\frac{dh}{dl} < 0$.
- Nếu mực nước có độ sâu không đổi gọi là dòng đều: $\frac{dh}{dl} = 0$.

Đặt: $A = i - J$ (2-49)

và $B = 1 - Fr$ (2-50)

Nên: $\frac{dh}{dl} = \frac{A}{B}$ (2-51)

Gọi h_0, W_0, K_0, \dots là độ sâu, diện tích, đặc trưng lưu lượng, ... của dòng đều.

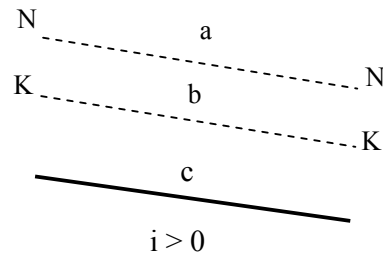
Gọi h, W, K, \dots là độ sâu, diện tích, đặc trưng lưu lượng, ... của dòng không đều.

- ♦ Từ (2-49) ta có 3 trường hợp xảy ra :
 - Khi $h = h_0$ thì $i = J$; nên $A = 0$
 - Khi $h > h_0$ thì $i > J$; nên $A > 0$
 - Khi $h < h_0$ thì $i < J$; nên $A < 0$
- ♦ Từ (2-50) cũng có 3 trường hợp xảy ra :
 - Khi $h = h_k$ thì $Fr = 1$; nên $B = 0$
 - Khi $h > h_k$ thì $Fr < 1$; nên $B > 0$
 - Khi $h < h_k$ thì $Fr > 1$; nên $B < 0$

Như vậy rõ ràng ta thấy đường mực nước phụ thuộc vào h_0, h_k, h (dòng không đều).

Để tiện nghiên cứu ta vẽ mặt cắt dọc kênh, có đường N - N ứng với dòng đều, K - K ứng

với độ sâu phân giới. Như vậy ta có thể chia làm ba khu: a, b, c (Hình 2-5).



Hình 2-5

2.7.2 Cách xác định các dạng đường mực nước

Độ dốc kênh chia ra các trường hợp là $i > 0$, $i = 0$ (*horizontal slope*) và $i < 0$ (*adverse slope*). Riêng trường hợp $i > 0$ chia ra 3 trường hợp:

- $i < i_k$ (*mild slope*)
- $i > i_k$ (*steep slope*)
- $i = i_k$ (*critical slope*)

a. Đối với kênh độ dốc thuận: $i > 0$

Trường hợp 1: $i < i_k$ nên $h_0 > h_k$

Khảo sát dấu của (2-51), ta biết h biến thiên trong khoảng $(0, \infty)$, như vậy h chạy từ 0 đến h_k , rồi đến h_0 và ∞ , kết hợp với việc xét dấu của tử số A và mẫu số B như trên tiến hành lập bảng dưới đây

Bảng 2.1 Biến thiên đường mực nước trường hợp $i < i_k$

h	0	h_k	h_0	∞
$A = i - J$	-		0	+
$B = 1 - Fr$	-	0	+	
$\frac{dh}{dl}$	+		0	+
Biến thiên				

Qua bảng biến thiên trên cuối cùng có 3 dạng đường mực nước ở 3 khu gọi là a_1 , b_1 và c_1 , xét giới hạn của đường các đường mực này:

- Đường mực nước a_1 là dâng và có bề lõm quay lên trong khoảng (h_0, ∞) , có 2 giới hạn sau:
 - Khi h tiến đến ∞ , ta tính giới hạn sau:

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{dh}{dl} = \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{i - J}{1 - Fr} = \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{i - \frac{Q^2}{K^2}}{1 - \frac{\alpha Q^2}{g^3} B} = i$$

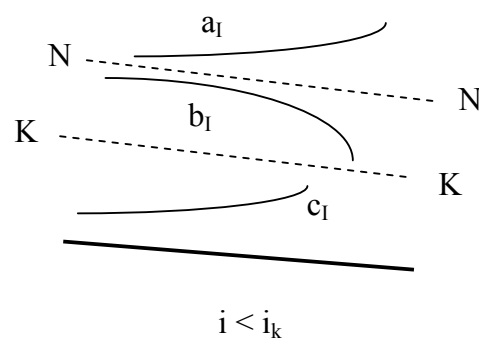
$\frac{dh}{dl}$ tiến đến i có nghĩa là đường mực nước tiến tới đường nằm ngang.

- Khi h tiến đến h_0 , ta tính giới hạn:

$$\lim_{h \rightarrow h_0} \frac{dh}{dl} = \lim_{h \rightarrow h_0} \frac{A}{B} = \lim_{h \rightarrow h_0} \frac{0}{B} = 0$$

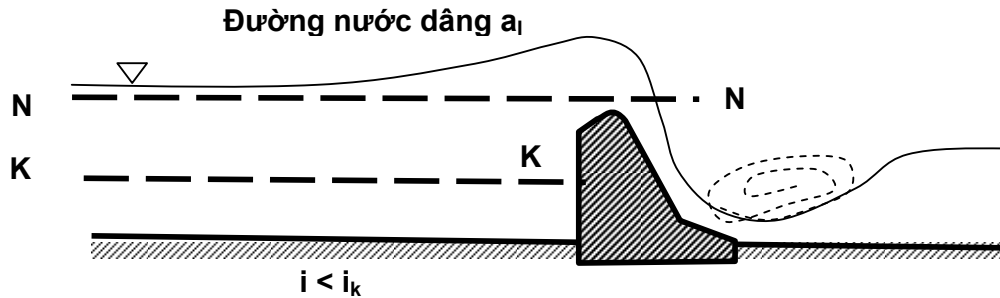
$\frac{dh}{dl}$ tiến đến không, từ đó cho thấy

đường mực nước nhận đường N-N làm tiệm cận.



Hình 2-6

Ví dụ về dạng đmn a_1 , trong trường hợp có đập tràn trên kênh như hình 2-1



Hình 2-1

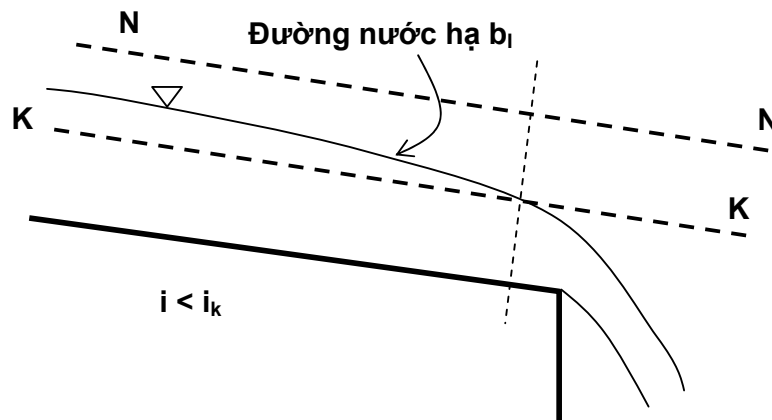
- Đường mực nước b_1 trong khoảng (h_k, h_0) là hạ và bề lõm quay xuống, có 2 giới hạn sau:

- Khi h tiến đến h_k ($h \rightarrow h_k^-$), ta xét giới hạn sau:

$$\lim_{h \rightarrow h_k} \frac{dh}{dl} = \lim_{h \rightarrow h_k} \frac{A}{S} = \lim_{h \rightarrow h_k} \frac{A}{0} = \infty$$

$\frac{dh}{dl}$ tiến đến vô cùng lớn, điều này cho thấy khi khoảng cách giữa 2 mặt cắt vô cùng nhỏ vẫn tồn tại chênh lệch mực nước. Do đó đường b_1 cắt đường K-K và có tiếp tuyến tại điểm cắt vuông góc với đường ấy

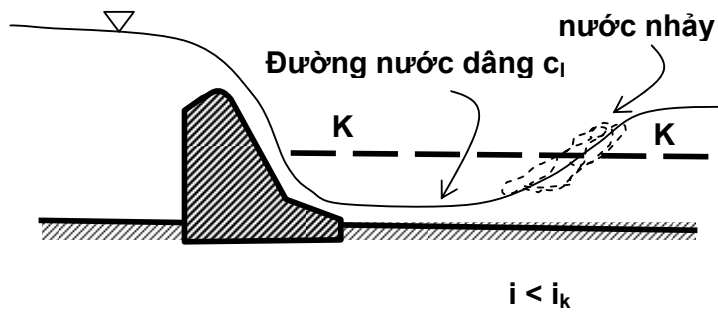
- Khi h tiến đến h_0 , ta tính giới hạn tương tự như trên cho thấy đường mực nước nhận đường N-N làm tiệm cận



- Đường mực nước c_1 trong khoảng $(0, h_k)$ là dâng và có bề lõm quay lên, có 2 giới hạn sau

- Khi h tiến đến 0, trong trường hợp này dòng chảy xiết ($h < h_k$), sẽ tồn tại lớp nước khác không.
- Khi h tiến đến h_k , xét giới hạn tương tự như trên, nhưng đường c_1 dâng cắt đường K-K và có tiếp tuyến tại điểm cắt vuông góc với đường ấy. Tuy nhiên nếu xét kỹ giới hạn này là h tiến đến bên phải h_k ($h \rightarrow h_k^+$), thì đmnc mất liên tục khi đến gần K-K.

Trường hợp 1: $i < i_k$ sau khi khảo sát sự tăng giảm và các giới hạn của phương trình (2-51), vẽ các dạng đmnc như (hình 2-6).



Hình 2-6

Trường hợp 2: $i > i_k$ nên $h_0 < h_k$

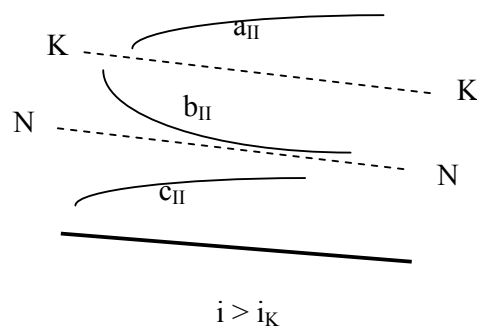
Tương tự như trường hợp 1, ta có bảng xét dấu của $\frac{dh}{dl}$ là sự biến thiên các dạng đường mực nước.

Bảng 2.2 Biến thiên đường mực nước trường hợp $i > i_k$

h	0	h_0	h_k	∞
$A=i-J$	-	0		+
$B=1-Fr$	-		0	+
$\frac{dh}{dl}$	+	0		+
Biến thiên	↗ h_0		↘ h_k → ngang	

Qua bảng biến thiên ta cũng xét giới hạn từng đmn có tên là a_{II} , b_{II} và c_{II} như sau

- Đường mực nước a_{II} là dâng và bề lõm quay xuống dưới trong khoảng (h_k, ∞) , có 2 giới hạn sau:
 - Khi h tiến đến ∞ , ta tính giới hạn như trên, kết quả là đường mực nước tiến tới đường nằm ngang.
 - Khi h tiến đến h_k ($h \rightarrow h_k^-$), ta cũng xét giới hạn như trên, có đường a_{II} cắt đường K-K và có tiếp tuyến tại điểm cắt vuông góc với đường ấy.
- Đường mực nước b_{II} trong khoảng (h_0, h_k) là hạ và bề lõm quay lên trên, có 2 giới hạn sau
 - Khi h tiến đến h_k ($h \rightarrow h_k^+$), đường a_{II} cắt đường K-K và có tiếp tuyến tại điểm cắt vuông góc với đường ấy. Nhưng khi h tiến đến bên phải h_k ($h \rightarrow h_k^+$), thì đmn mất liên tục khi đến gần K-K.
 - Khi h tiến đến h_0 , đường mực nước nhận đường N-N làm tiệm cận.



Hình 2-7

- Đường mực nước c_{II} trong khoảng $(0, h_0)$ là dâng và bề lõm quay xuống, có 2 giới hạn sau
 - Khi h tiến đến 0, trong trường hợp này dòng chảy xiết ($h < h_k$), sẽ tồn tại lớp nước khác không.
 - Khi h tiến đến h_0 , đường mực nước nhận đường $N-N$ làm tiệm cận.
 Trường hợp 2 $i > i_k$ sau khi khảo sát sự tăng giảm và các giới hạn của phương trình (2-51), vẽ các dạng đmn như trong (hình 2-7).

Trường hợp 3: $i = i_k$ nên $h_0 = h_k$

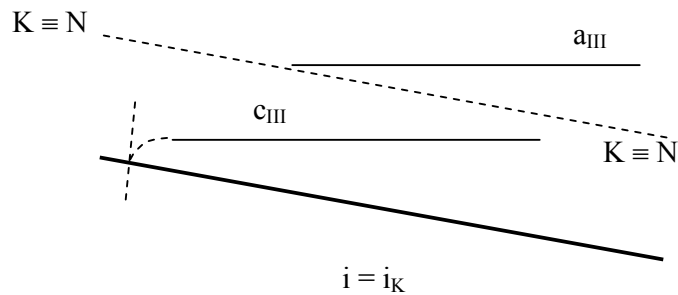
Tương tự như hai trường hợp, nhưng đặc biệt là $h_0 = h_k$, nên không có khu b, ta cũng lập bảng xét dấu của $\frac{dh}{dl}$ xem sự biến thiên các dạng đường mực nước.

Bảng 2.2 Biến thiên đường mực nước trường hợp $i > i_k$

h	0	h_k	∞
$A = i - J$	-	0	+
$B = 1 - Fr$	-	0	+
$\frac{dh}{dl}$	+		+
Biến thiên			

Qua bảng biến thiên ta cũng xét giới hạn từng đmn có tên là a_{III} và c_{III} như sau

- Đường mực nước a_{III} là dâng nhưng nằm ngang trong khoảng (h_k, ∞) , có 2 giới hạn sau:
 - Khi h tiến đến ∞ , ta tính giới hạn như trên, kết quả là đường mực nước tiến tới đường nằm ngang
 - Khi h tiến đến $h_k = h_0$ ta thấy giới hạn là dạng vô định $\frac{0}{0}$. Như vậy, cần phải khử dạng vô định này, để tính giá trị $\frac{dh}{dl}$, ta tính như sau :



Hình 2-8

$$\lim_{h \rightarrow h_k = h_0} \frac{dh}{dl} = \lim_{h \rightarrow h_k = h_0} \frac{i - J}{1 - Fr} = \lim_{h \rightarrow h_k = h_0} \frac{i - \frac{Q^2}{W^2 C^2 R}}{1 - \frac{\alpha Q^2}{g W^3} B}$$

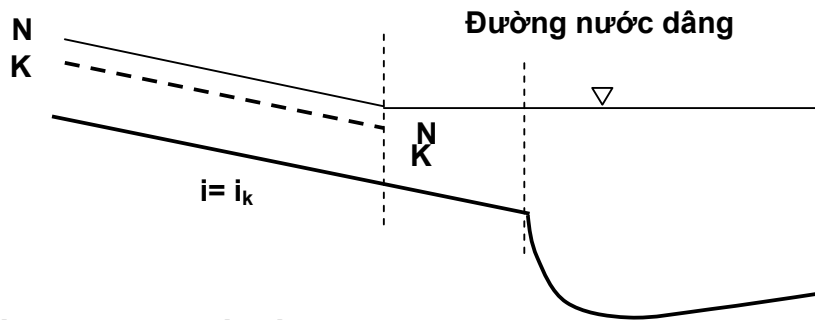
Thay các công thức (2-20) và (2-32), chú ý đến công thức về bán kính thủy lực và xem gần đúng: $X \approx B$ và $C_k \approx C$, biến đổi ta được:

$$\lim_{h \rightarrow h_k = h_0} \frac{dh}{dl} = \lim_{h \rightarrow h_k = h_0} \frac{i_k - \frac{W_k^2 C_k^2 R_k i_k}{W^2 C^2 R}}{1 - \frac{W_k^3 B}{B_k W^3}} = \lim_{h \rightarrow h_k = h_0} i_k \frac{1 - \frac{W_k^2 P}{X_k W^3}}{1 - \frac{W_k^3 B}{B_k W^3}} = i_k$$

Rõ ràng ta thấy đường a_{III} có giới hạn đầu và cuối là các đường nằm ngang và chính bản thân đường a_{III} có độ cong rất bé, nên thực tế đường a_{III} được xem là đường nằm ngang.

- Đường mực nước c_{III} là dâng, trong thực tế có xem là đmn nằm ngang trong khoảng (0, h_k), các giới cũng xét như trên.

Như vậy: ta đã xét 8 loại đường mực nước trường hợp i > 0.



b. Đối với kênh độ dốc bằng: i = 0

Lúc i = 0, vì không có chảy đều nên không tồn tại dòng chảy đều (không có h₀), chỉ còn lại hai khu b và c. Do đó dòng chảy được là do một nguyên nhân khác chứ không phải do tác dụng của trọng lực.

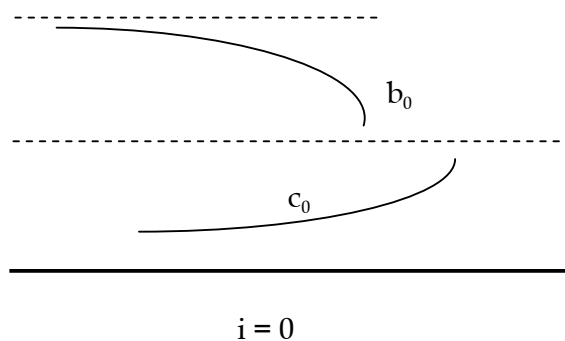
Ta cũng lập bảng xét dấu như trên, nhưng chú ý là tử số luôn âm vì i=0.

Bảng 2.2 Biến thiên đường mực nước trường hợp i > i_k

h	0	h _k	∞
A = - J	-		-
B = 1 - Fr	-	0	+
$\frac{dh}{dl}$	+		-
Biến thiên			

Qua bảng biến thiên, xét giới hạn từng của hai đmn là b₀ và c₀ như sau

- Đường mực nước b₀ trong khoảng (h_k, ∞) là hạ và bẻ lõm quay xuống, có 2 giới hạn sau:
 - Khi h tiến đến ∞, thì đường mực nước tiến tới đường nằm ngang, trong thực tế đmn nhận đường nằm ngang làm tiệm cận.



i = 0

Hình 2-9

- Khi h tiến đến h_k ($h \rightarrow h_k^-$), đường b_0 cắt đường K-K và có tiếp tuyến tại điểm cắt vuông góc.
 - Đường mực nước c_0 trong khoảng $(0, h_k)$ là dâng và bề lõm quay lên trên, có 2 giới hạn sau:
 - Khi h tiến đến h_k ($h \rightarrow h_k^+$), đường c_0 cắt đường K-K và có tiếp tuyến tại điểm cắt vuông góc với đường ấy. Nhưng khi h tiến đến h_k , thì đmn mất liên tục khi đến gần K-K.
 - Khi h tiến đến 0, trong trường hợp này dòng chảy xiết ($h < h_k$), sẽ tồn tại lớp nước khác không.
- Hai dạng đmn trường hợp $i=0$, thể hiện (hình 2-9).

c. Kênh dốc nghịch: $i < 0$.

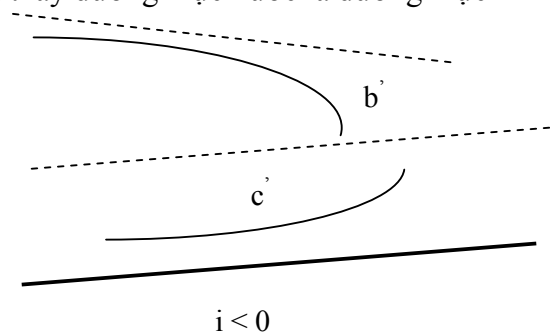
Cũng như $i = 0$, ở đây không có độ sâu chảy đều, do đó cũng chỉ có 2 khu c và b.

- Khu b: $h > h_k$. Xét tương tự như trên ta thấy đường mực nước là đường mực nước hạ, gọi là b' , có dạng giống như b_0 .
- Khu c: $h < h_k$

Xét tương tự như trên ta thấy đường mực là đường mực nước dâng, gọi là c' , có dạng giống như là c_0 .

Các đmn dốc nghịch thể hiện vẽ ở hình 2-10.

Trên ta đã xét tất cả các loại đường mặt nước có thể xảy ra trong kênh lắng trụ lúc chảy không đều. Xem bảng tóm tắt sau.



Hình 2-10

Bảng 2-1: Tóm tắt các loại đường mực nước

i		Loại đường mặt nước		
		Khu a	Khu b	Khu c
$i > 0$	$i < i_K$	a_I	b_I	c_I
	$i > i_K$	a_{II}	b_{II}	c_{II}
	$i = i_K$	a_{III}	không	c_{III}
$i = 0$		không	b_0	c_0
$i < 0$		không	b	c

Trong 12 loại đường mực nước, có 6 đường $a_I, b_I, c_I, a_{II}, b_{II}, c_{II}$ là cơ bản nhất, 6 đường còn lại có thể suy từ 6 đường kia.

Qua các dạng đường mực nước, ta có thể rút ra những kết luận:

1. Ở khu a và c chỉ có thể là đường nước dâng.
2. Ở khu b chỉ có thể là đường nước hạ.
3. Đường mực nước chỉ có thể tiến tới tiệm cận với đường N-N hoặc đường nằm ngang chứ không bao giờ tiệm cận với đường K-K.
4. Đường mặt nước có xu thế cắt đường K-K chứ không bao giờ có xu thế cắt đường N-N. Khi qua đường K-K thì đường mặt nước mất liên tục hoặc đứt.

Ghi chú: Ta có thể tóm tắt việc nghiên cứu 12 loại đường mực nước nói trên bằng cách nghiên cứu trên đồ thị, vẽ cho kênh lắng trụ có mặt cắt ngang cho trước và ứng với một lưu lượng Q cho trước.

a. Ta vẽ đồ thị trên đó chú ý 2 đường: đường cong $h_0 = f(i)$ và $h = h_k$, ta thấy:

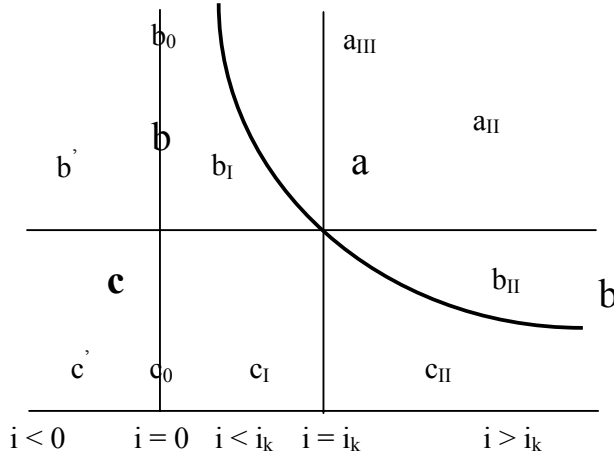
- Với h ở cao hơn đường $h_0=f(i)$ thì từ số dương và ngược lại thì từ số âm.
- Với h ở cao hơn đường $h=h_k$ thì mẫu số dương và ngược lại thì mẫu số âm.

Do đó: hai đường $h_0=f(i)$ và $h=h_k$ đã chia đồ thị thành ba khu.

- Khu a: Nước dâng chảy êm.
- Khu c: Nước dâng chảy xiết.
- Khu b: Nước hạ chảy êm và nước hạ chảy xiết.

b. Kẻ đường thẳng đứng $i = i_k$; hai đường thẳng đứng $i = 0$ và $i = i_k$ chia mặt phẳng đồ thị thành năm miền. Kết hợp với ba khu a, b, c ta có đủ 12 đường mặt nước trên đồ thị.

c. Nếu biết tọa độ của một điểm (h, i) trên đồ thị này, sẽ xác định được tên đường mặt nước tương ứng.



Hình 2-11

Ngoài ra đồ thị này có thể dùng để nghiên cứu hình dạng nối tiếp đường mặt nước khi có độ dốc kênh thay đổi.

2.8 CÁCH TÍNH VÀ VẼ ĐƯỜNG MẶT NƯỚC TRONG KÊNH

Trên ta mới chỉ xác định đường mực nước về mặt định tính, nghĩa là chỉ xác định được tính chất và dạng của các loại đường, còn chưa tính toán cụ thể.

Tính và vẽ đường mực nước trong kênh, ta cần giải một trong hai phương trình là (2-14) hay (2-48a) có dạng như sau:

$$\frac{d\vartheta}{dl} = i - J \quad \text{hay} \quad \frac{dh}{dl} = \frac{i - J}{1 - F_r^2}$$

Khi ta có Q, m, n, i, b , nên xác định được h_0, h_k , vì vậy xác định được dạng đường mực nước. Giải phương trình trên tìm được nghiệm dưới dạng $h = h(l)$, nếu biết một điều kiện biên, chẳng hạn biết độ sâu tại một mặt cắt bất kỳ.

Có nhiều phương pháp giải các phương trình trên, ở đây chỉ giới thiệu một hai phương pháp đơn giản.

2.8.1 Phương pháp cộng trực tiếp

Ta sử dụng phương trình vi phân (2-14) chuyển phương trình trên thành phương trình sai phân:

$$\frac{\Delta \vartheta}{\Delta L} = i - \bar{J} \tag{2-53}$$

hay
$$\Delta l = \frac{\Delta \vartheta}{i - \bar{J}} \tag{2-54}$$

Chia kênh thành từng đoạn nhỏ, tính cho từng đoạn một xong cộng lại sẽ có kết quả cho toàn đoạn kênh.

$$L = \sum_{i=1}^n \Delta L_i = \sum_{i=1}^n \frac{\Delta \vartheta_i}{i - \bar{J}_i} \tag{2-55}$$

Trong đó:

$$\Delta \vartheta = \vartheta_{i+1} - \vartheta_i \quad (2-56)$$

Ký hiệu:

i chỉ mặt cắt thượng lưu đoạn thứ i .

$i+1$ chỉ mặt cắt hạ lưu đoạn thứ $i+1$.

\bar{J} : độ dốc thủy lực trung bình của một đoạn, tính theo công thức dòng chảy đều:

$$\bar{J} = \frac{Q^2}{\bar{K}^2} = \frac{\bar{v}^2}{C^2 R^2} \quad (2-57)$$

57)

\bar{K} hệ số đặc trưng lưu lượng được tính theo trị số trung bình độ sâu mực nước:

$$\bar{h} = \frac{h_{i+1} + h_i}{2} \quad (2-58)$$

58)

Nghĩa là lấy độ sâu trung bình để \bar{W} , \bar{X} , suy ra \bar{R} rồi tính \bar{C} và \bar{K} hoặc lấy trị số trung bình của W , v , C , R , ... của hai mặt cắt hai đầu, tức là:

$$\bar{C} = \frac{C_{i+1} + C_i}{2} \quad (2-59)$$

$$\bar{R} = \frac{R_{i+1} + R_i}{2} \quad (2-60)$$

$$\bar{v} = \frac{v_{i+1} + v_i}{2} \quad (2-61)$$

Phương pháp này tính đơn giản, nhanh, mức độ chính xác phụ thuộc vào cách chia đoạn và sự biến đổi của độ dốc thủy lực. Nếu J không thay đổi nhiều lắm dọc theo dòng chảy thì kết quả khá chính xác. Tại những chỗ J thay đổi khá nhanh, ta cần chia nhiều đoạn hơn, để tăng độ chính xác.

Lợi điểm của phương pháp này dùng được cho cả kênh lắng trụ và phi lắng trụ, ngoài ra không phải tra bảng như phương pháp tích phân gần đúng. Tuy nhiên mức độ sai số rất phụ thuộc vào cách chia của người tính.

Dưới đây giới thiệu phương pháp tích phân gần đúng, ta sử dụng phương pháp này cho việc lập trình hay dùng các phần mềm như Mathcad . . . tính trên máy tính để bàn chứ nếu tính tay dùng bảng tra rất mất thời gian, thêm nữa củidùng cho kênh lắng trụ.

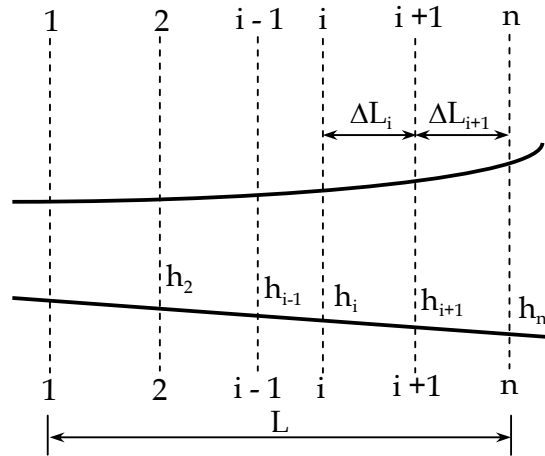
2.8.2 Phương pháp tích phân gần đúng

Ta sử dụng phương trình vi phân (2-48a), chia làm 3 trường hợp tính như sau:

- ◆ Khi $i > 0$, ta biến đổi công thức thành dạng:

$$\frac{dh}{dl} = i \frac{1 - \left(\frac{K_0}{K}\right)^2}{1 - j \left(\frac{K_0}{K}\right)^2} \quad (2-62)$$

Ở đó:
$$j = \frac{\alpha i C^2 B}{g X} \quad (2-63)$$



Hình 2-12

- ◆ Khi $i = 0$, ta lấy $i = i_n > 0$ tùy ý trong phạm vi độ dốc dương thường gặp, biến đổi phương trình vi phân với $Q = K_n \sqrt{i}$

Ta được:

$$\frac{dh}{dl} = -i_n \frac{1 - \left(\frac{K_n}{K}\right)^2}{1 - j_n \left(\frac{K_n}{K}\right)^2} \quad (2-64)$$

ở đó: j_n tính như j theo công thức (2-63) nhưng thay $i = i_n$

- ◆ Khi $i < 0$, ta lấy $i' = -i$, biến đổi phương trình với $Q = K_o' \sqrt{i'}$

Ta được:

$$\frac{dh}{dl} = -i' \frac{1 - \left(\frac{K_o'}{K}\right)^2}{1 - j' \left(\frac{K_o'}{K}\right)^2} \quad (2-65)$$

ở đó j' tính như j theo công thức (2-63) nhưng thay $i' = i$

Hiện nay, các phương trình trên thường được giải theo hai phương pháp: số mũ thủy lực x và số mũ z .

2.8.2.1 Phương pháp số mũ thủy lực x

Ta thấy:

$$\frac{dh}{dl} = f(h)$$

Ta xem $j = \text{const}$ trong khi lấy tích phân và biến đổi $f(f)$ thành một hàm số lũy thừa nào đó.

Với kênh lằng trụ:

$$K = \omega C \sqrt{R} = K(h) \quad (2-66)$$

Đường biểu diễn số 1 của nó là đường liền nét. Nó có thể gần trùng với đường biểu diễn số 2 của một hàm số lũy thừa nào đó như sau :

$$K = D h^p = D h^{x/2} \quad (2-67)$$

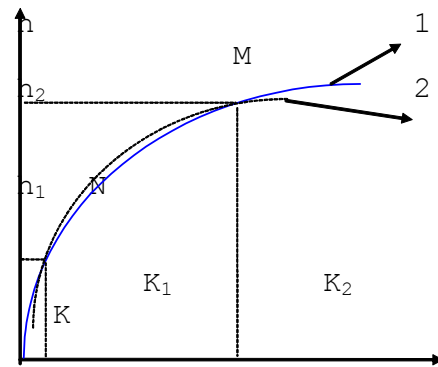
Nên ta có hai ẩn số x và A , ta cần thiết lập hai phương trình. Muốn thế ta lấy hai điểm trên đường số 1, sao cho:

$$K_1 = D h_1^{\frac{x}{2}} \quad \text{và} \quad K_2 = D h_2^{\frac{x}{2}}$$

Lập tỉ số 2 phương trình trên, khử D sau đó lấy logarit 2 vế và giải ra ta được:

$$x = \frac{\lg K_2 - \lg K_1}{\lg h_2 - \lg h_1} \quad (2-68)$$

Từ công thức trên ta thấy giá trị x phụ thuộc vào tọa độ hai điểm chọn trước, nhưng với mặt cắt hoàn chỉnh thì khi ta chọn bất kỳ điểm nào trên đường 1.



Hình 2-13

Giá trị x thay đổi rất ít và trong tính toán thực tế có thể xem như không đổi.

- a. Với $i > 0$: Ta xét K, K_0 theo hàm số lũy thừa tương ứng của h, h_0 :

$$\left(\frac{K}{K_0}\right)^2 = \left(\frac{h}{h_0}\right)^x \quad (2-69)$$

Ta đặt:
$$\eta = \frac{h}{h_0} \tag{2-70}$$

Thay (2-70) vào (2-69) ta được:

$$\left(\frac{K}{K_0}\right)^2 = \eta^x \tag{2-71}$$

Lấy đạo hàm (2-70), ta được :

$$dh = h_0 \cdot d\eta \tag{2-72}$$

Thay (2-71) và (2-72) vào công thức (2-62) sắp xếp ta được:

$$\frac{i}{h_0} dl = d\eta - (1 - \bar{j}) \frac{d\eta}{1 - \eta^x} \tag{2-73}$$

Lấy tích phân từ mặt cắt (1-1) đến (2-2), trong đó xem \bar{j} là hằng số, bằng trị số trung bình:

$$\bar{j} = \frac{\alpha \cdot i \cdot \overline{C^2 B}}{g \cdot \overline{X}} \tag{2-74}$$

Ta được:
$$\frac{i}{h_0} l_{1-2} = \eta_2 - \eta_1 - (1 - \bar{j}) [\varphi(\eta_2) - \varphi(\eta_1)] \tag{2-75}$$

Ở đây:
$$\varphi(\eta) = \int \frac{d\eta}{1 - \eta^x} + const \tag{2-76}$$

$\varphi(\eta)$ trong các tài liệu về thủy lực đều có bảng tra tính giá trị theo (2-76). Vì tích phân trên không có nguyên hàm, bằng phương tính có thể giải được. Do vậy tích phân có thể dùng cách lập trình hay phần mềm Mathcad để tính thuận tiện hơn.

Giá trị x tính theo (2-68), tùy theo dạng đường mực nước ở khu a; b hay c, thường với:

$$h_1 = h_0 \quad \text{nên} \quad K_1 = K_0$$

$$h_2 = \bar{h} \quad \text{nên} \quad K_2 = \bar{K}$$

\bar{h} là độ sâu trung bình trong dòng không đều ta xét.

b. Với $i = 0$: Ta xét K, K_n theo hàm số lũy thừa tương ứng của h, h_n :

$$\left(\frac{K}{K_n}\right)^2 = \left(\frac{h}{h_n}\right)^x \tag{2-77}$$

Ta đặt:
$$\xi = \frac{h}{h_0} \tag{2-78}$$

Thay (2-77) vào (2-76), ta được:

$$\left(\frac{K}{K_n}\right)^2 = \xi^x \tag{2-79}$$

$$dh = h_n \cdot d\xi \tag{2-80}$$

Thay (2-78) và (2-79) vào công thức (2-64) sau khi rút gọn và lấy tích phân từ mặt cắt (1-1) đến mặt cắt (2-2), ta được:

$$\frac{i_n}{h_n} l_{1-2} = \bar{j}_n (\xi_2 - \xi_1) - \frac{\xi^{x+1} - \xi^x}{x+1} \tag{2-81}$$

Giá trị x tính có thể lấy với $h_1 = h_n$ và $h_2 = \bar{h}$, còn giá trị \bar{j}_n xác định theo công thức:

$$\bar{j}_n = \frac{\alpha i_n}{g} \frac{\overline{C^2 B}}{\bar{X}} \quad (2-82)$$

Nếu lấy $i_n = i_k$ và sắp xếp lại ta có:

$$\frac{i_k}{h_k} L_{1-2} = (\bar{j}_k - 1)(\xi_2 - \xi_1) - [\psi(\xi_2) - \psi(\xi_1)] \quad (2-83)$$

Trong đó:
$$\bar{j}_k = \frac{X_k}{X} \frac{\overline{C^2 B}}{C_k^2 B_k} \quad (2-84)$$

Tính sơ bộ có thể lấy $\bar{j}_k = 1$

Vậy ta được:

$$\frac{i_k}{h_k} L_{1-2} = -[\psi(\xi_2) - \psi(\xi_1)] \quad (2-85)$$

trong đó:
$$\psi(\xi) = \frac{\xi^{x+1}}{x+1} - \xi + const \quad (2-86)$$

Giá trị của (2-86) chúng ta có thể tính được trực tiếp không cần tra bảng, không như tích phân (2-76) không có nguyên hàm

c. Với $i < 0$: Ta xét K, K_0' theo hàm số lũy thừa tương ứng của h, h_0'

$$\left(\frac{K}{K_0'}\right)^2 = \left(\frac{h}{h_0'}\right)^x \quad (2-87)$$

Ta đặt:
$$\zeta = \frac{h}{h_0'} \quad (2-88)$$

Thay (2-88) vào (2-87) nên ta được:

$$\left(\frac{K}{K_0'}\right)^2 = \zeta^x \quad (2-89)$$

lấy đạo hàm(2-88) ta được :

$$dh = h_n \cdot d\zeta \quad (2-90)$$

Thay (2-89) và (2-90) vào công thức (2-65) biến đổi và lấy tích phân ta được:

$$\frac{i'}{h_0'} L_{1-2} = -(\zeta_2 - \zeta_1) + (1 + \bar{j}') [\Phi(\zeta_2) - \Phi(\zeta_1)] \quad (2-91)$$

trong đó:
$$\bar{j}' = \frac{\alpha i' C^2 B}{g \bar{X}} \quad (2-92)$$

$$\Phi(\zeta) = \int \frac{d\zeta}{\zeta^x + 1} + C. \quad (2-93)$$

Giá trị x tính với $h_1 = h_0$; $h_2 = \bar{h}$

Giá trị của tích phân theo công thức (2-93) như đã nói ở trên trường hợp không có nguyên hàm, ta dùng phương tính hay dùng phần mềm thích hợp sẽ giải được.

2.8.2.2. Phương pháp số mũ thủy lực z

Cũng như phương pháp số mũ thủy lực x, phương pháp số mũ z biến đổi các phương trình (2-63), (2-64) và (2-65) về dạng đơn giản hơn. Ở đây dùng phương pháp đổi biến số, từ h sang τ . τ được xác định từ quan hệ:

$$\left(\frac{K}{K_0}\right)^2 = \tau^z \quad (2-94)$$

hay
$$\tau = \left(\frac{K}{K_0} \right)^{\frac{2}{z}} \quad (2-95)$$

z là một hằng số tùy ý chọn, thường lấy từ 2 đến 5.5 (N. N. Pavolópki $z = 2$; I. I. Agorótkkin lấy $z = 5.5$; M.Đ. Tréctôuxốp lấy $z = 4$ v.v...)

Còn quan hệ giữa a và h là:

$$Dh = a.d\tau \quad (2-96)$$

ở đây a là hệ số, được xác định một cách gần đúng bằng tỷ số:

$$a = \frac{\Delta h}{\Delta \tau} = \frac{h_2 - h_1}{\tau_2 - \tau_1} \quad (2-97)$$

trong đó:

- h_1, h_2 là hai độ sâu trong đoạn đang xét;
 - τ_1, τ_2 là hai trị số tương ứng với độ sâu h_2, h_1 .
- a. **Với $i > 0$:** Thay (2-95) và (2-96) vào (2-62), sau khi sắp xếp lại và tích phân ta được:

$$\frac{i}{a} L_{1-2} = \tau_2 - \tau_1 - (1 - \bar{j}) [\varphi(\tau_2) - \varphi(\tau_1)] \quad (2-98)$$

Ở đây:
$$\varphi(\tau) = \int \frac{d\eta}{1 - \tau^z} + const \quad (2-99)$$

$\varphi(\tau)$ cũng không có thứ nguyên từ khi ta chọn $z = 2$.

b. **Với $i = 0$:** Thay

$$\tau_n = \left(\frac{K}{K_n} \right)^{\frac{2}{z}} \quad (2-100)$$

$$dh = a_n.d\tau_n \quad (2-101)$$

vào công thức (2-64) sau khi rút gọn và lấy tích phân ta được:

$$\frac{i_n}{a_n} L_{1-2} = \bar{j}_n (\tau_{n2} - \tau_{n1}) - \frac{\tau_{n2}^{X+1} - \tau_{n1}^{X+1}}{X+1} \quad (2-102)$$

ở đây:
$$a_n = \frac{h_2 - h_1}{\tau_{n2} - \tau_{n1}} \quad (2-103)$$

Còn \bar{j}_n lấy theo công thức (2-82).

Nếu lấy $i_n = i_k$, thì một cách gần đúng cho $j_k = 1$ công thức (2-102) sắp xếp lại ta có:

$$\frac{i_k}{a_k} L_{1-2} = -[\psi(\tau_2) - \psi(\tau_1)] \quad (2-104)$$

$$\psi(\tau) = \frac{\tau^{z+1}}{z+1} - \xi + const \quad (2-105)$$

Giá trị $\psi(\tau)$ ta có thể tính trực tiếp được.

c. **Với $i < 0$,** thay

$$\tau' = \left(\frac{K}{K_0'} \right)^{\frac{2}{z}} \quad (2-106)$$

và
$$dh = a' . d\tau' \quad (2-107)$$

vào công thức (2-65) biến đổi và lấy tích phân ta được:

$$\frac{i'}{a'} L_{1-2} = -(\tau'_2 - \tau'_1) + (1 + \bar{j}') [\Phi(\tau'_2) - \Phi(\tau'_1)] \quad (2-108)$$

ở đây:
$$a' = \frac{h_2 - h_1}{\tau'_2 - \tau'_1} \quad (2-109)$$

\bar{j}' tính theo công thức (2-92)

$$\Phi(\tau') = \int \frac{d\tau'}{\tau'^z + 1} + const. \quad (2-110)$$

giá trị $\Phi(\tau')$ không có nguyên hàm, ta có thể chọn $z=2$ để tính.