PHỤ CHƯƠNG 4

QUI HOẠCH TUYẾN TÍNH

--- oOo ---

Một trong các phương pháp chọn phương án tối ưu, thuật toán Qui hoạch Tuyến tính (*Linear Programming*) được sử dụng nhiều trong phân tích kinh tế. Sau đây là các ví dụ dẫn đến các bài toán Quy hoạch Tuyến tính:

📖 Ví dụ thứ 1:

Nông dân Hai Lúa có 50 ha đất. Bên cạnh kỹ thuật kinh nghiệm canh tác và tiên đoán thị trường tiêu thụ, dựa vào điều kiện đất đai, nhân lực và nguồn nước, Hai Lúa quyết định trồng 2 loại hoa màu là Bắp và Đậu. Sổ tay Trồng trọt của Hai Lúa cho biết để có 1 Tấn sản phẩm từng loại hoa màu thì cần:

Yếu tố sản xuất	Đơn vị tính	Hoa màu		Nguồn tài nguyên lớn nhất
		Bắp (1)	Đậu (2)	
Đất đai	Ha/Tấn	2	3	50 Ha
Nhân lực	Người - Vụ/Tấn	6	4	90 Người - Vụ
Nguồn nước	10^6 m^3/ Tấn	20	5	250 x 10^6 m^3
Tiền lời	Tr.Đ/ Tấn	18	21	

Hãy định phương án huy động nguồn tài nguyên để có số sản phẩm bán lời nhất.

Hướng giải:

Gọi X_1 là số tấn thu hoạch cho vụ Bắp, X_2 là số tấn thu hoạch cho vụ Đậu.

Giá bán cho số sản phẩm này:

$Z = 18.X_1 + 21.X_2$ (tổng lợi nhuận thu được theo phương án sản xuất)

Mục tiêu của Hai Lúa là có giá trị Zmax.

Gọi $Z = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j \rightarrow \max$. Z gọi là **hàm mục tiêu** (*Objective Function*).

trong đó Cj là lợi nhuận thu được cho 1 đơn vị sám phẩm Xj . Trong bài toán trên, giá trị X_1 và X_2 bị ràng buộc bởi các yếu tố khác (yếu tố hạn chế tài nguyên):

- Đất đai (i=1): $2X_1 + 3X_2 \leq 50$ (ha)
- Nhân lực (i=2): $6X_1 + 4X_2 \leq 90$ (người - vụ)
- Nguồn nước (i=3): $20X_1 + 5X_2 \leq 250$ (10^6 m^3)

Tổng quát: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \leq b_i$, với i = 1 .. m, j = 1 .. n

Các ràng buộc này gọi là các **ràng buộc chủ động** (*Active Constrains*)

Dĩ nhiên, X_1 và X_2 biểu thị sản phẩm nên: $X_1 \geq 0$ và $X_2 \geq 0$

hay $Xj \geq 0$ với j = 1 .. m

Gọi là các **ràng buộc thụ động** (*Inactive Constrains*)

Tóm lại ta có bài toán tổng quát:

$$\begin{cases} Z = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j \rightarrow \max \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \leq b_i \text{, với } i = 1 .. m, \quad j = 1 .. n \\ Xj \geq 0 \end{cases}$$

Hệ phương trình dạng này gọi là bài toán **Qui hoạch Tuyến tính dạng Chuẩn.**

📖 Ví dụ thứ 2:

Có 3 hồ chứa nước A, B và C, nếu muốn khai thác có lợi thì lượng nước lấy đi phải ít nhất lần lượt là 20, 30, và 50 Triệu m^3 trong mùa khô. Hai huyện I và II có nhu cầu nước tối thiểu để canh tác trong mùa khô lần lượt là 40 và 60 Triệu m^3.

Chi phí khai thác nước cho ở bảng sau:

Huyện	Chi phí khai thác nước (10^6 \$/ Triệu m^3)		
	A (20 Triệu m^3)	B (30 Triệu m^3)	C (50 Triệu m^3)
I	2	4	5
II	3	6	7

Hãy định phương án khai thác nước với chi phí nhỏ nhất.

Hướng giải:

Gọi X_1, X_2 và X_3 là khối lượng nước từ hồ A, B và C về huyện I.

X_4, X_5 và X_6 là khối lượng nước từ hồ A, B và C về huyện II.

Dĩ nhiên, X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 và $X_6 \geq 0$

Tổng kinh phí khai thác nguồn nước phải nhỏ nhất, nghĩa là:

$$Z = 2X_1 + 4X_2 + 5X_3 + 3X_4 + 6X_5 + 7X_6 \rightarrow \min$$

Để đảm bảo nhu cầu nước tối thiểu cho mỗi huyện, ta có:

$X_1 + X_2 + X_3 \geq 40$ (huyện I)

$X_4 + X_5 + X_6 \geq 60$ (huyện II)

Mức khai thác nước tối thiểu có lợi cho từng hồ chứa:

- Hồ A: $X_1 + X_4 \geq 20$ (Triệu m^3)
- Hồ B: $X_2 + X_5 \geq 30$ (Triệu m^3)
- Hồ C: $X_3 + X_6 \geq 50$ (Triệu m^3)

Tổng quát (theo các ký hiệu trên):

$$\begin{cases} Z = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j \rightarrow \min \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \geq b_i \text{ , với i = 1 .. m, j = 1 .. n} \\ Xj \geq 0 \end{cases}$$

Dạng này gọi là bài toán **Qui hoạch Tuyến tính dạng Cơ bản.**

Trong trường hợp:

$$\begin{cases} Z = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j \rightarrow \min \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j = b_i \text{ , với i = 1 .. m, j = 1 .. n} \\ Xj \geq 0 \end{cases}$$

Dạng này gọi là bài toán **Qui hoạch Tuyến tính dạng Chính tắc.**

Dạng tổng quát chung:

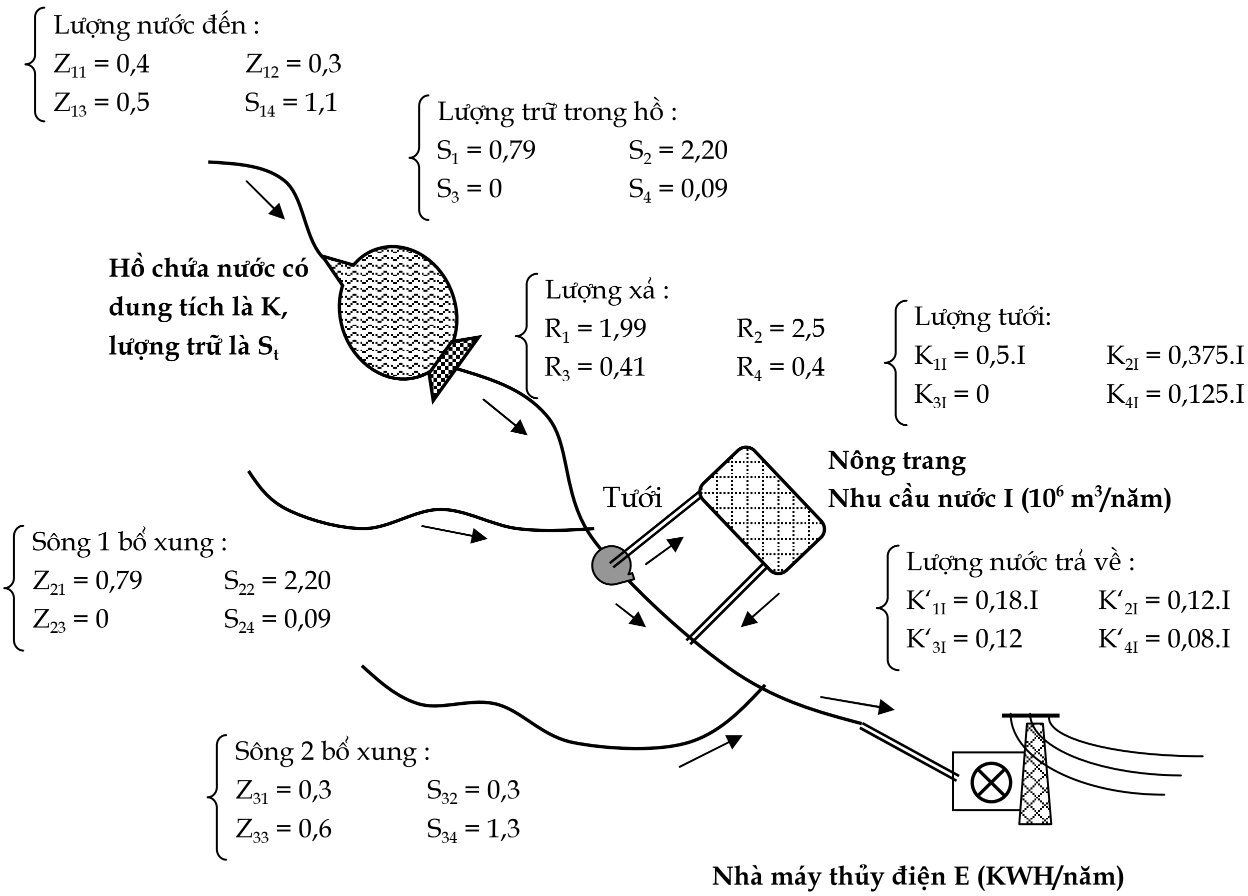
$$\begin{cases} Z = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j \rightarrow \max \text{ (min)} \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \begin{matrix} \geq \\ = \\ \leq \end{matrix} b_i \text{ , với i = 1 .. m, j = 1 .. n} \\ Xj \begin{matrix} \geq \\ = \\ \leq \end{matrix} 0 \text{ hoặc không hạn chế} \end{cases}$$

Ví dụ: Một hệ thống thủy lợi như hình vẽ, các dữ liệu liên quan đến diễn biến của của nguồn nước (đơn vị là triệu m^3) được xác định theo cơ sở trung bình theo mùa như sau:

t =1	: Mùa xuân;	t = 2	: Mùa hạ;
t = 3	: Mùa thu;	t = 4	: Mùa đông.

Điều kiện bài toán:

- Dòng chảy đến hồ chứa và dòng bổ xung hằng năm là ổn định (thực tế có thể xét theo tần suất xuất hiện)
- Thời gian xét là 1 năm thủy văn (từ đầu mùa xuân đến cuối mùa đông)



Các biến quyết định:

- K : dung tích hồ chứa
- I : lượng nước tưới cho nông trang/ năm
- E : hợp đồng cung cấp điện
- R_t : lượng nước xả từ hồ nhằm bảo đảm dòng chảy hạ lưu (cho giao thông, thủy sản, các hoạt động khác, ...)
- S_t : lượng nước trữ trong hồ.

Hàm phát điện: $E_t = 0,144\ Q_t$

- Q_t : lượng nước chảy qua turbine ở mùa t
- E_t : năng lượng phát ra ở mùa t

Việc sản xuất năng lượng phải được phân bố đều hằng năm: $E_t \geq \frac{E}{4}$

Năng lượng thừa: $(E_t - \frac{E}{4})$ sẽ dùng bơm nước trở lại hồ.

Hàm mục tiêu:

- Tiền lời bán điện: 200 \$/KWH/năm
- Tiền tưới nước: 40 \$/10^6.m^3/năm
- Tiền bảo dưỡng hồ chứa: 24 \$/10^6.m^3/năm

Giải:

Hàm mục tiêu:

$$\max Z = 200\,E + 40\,I - 24\,K$$

Ràng buộc:

- Lượng nước xả:

$$R_t \le S_t + Z_{1t} \quad \text{với } t = 1 .. 4$$

- Cân bằng nước hồ chứa:

$$St = St\text{-}1 + Z_{1\ t-1} - R_{t-1}$$

(xem lượng bốc hơi và rò rỉ không đáng kể)

Ở mùa xuân, t = 1, cho $S_{t-1} = S_4$ (của năm trước)

- Dung tích hồ chứa:

$$S_t + Z_{1t} - R_t \le K$$

- Dòng chảy ở điểm lấy nước tưới:

$$Z_{2t} + R_t - K_{tI} \ge 0 \qquad \text{với } t = 1 .. 4$$

- Lượng nước cho nhà máy thủy điện phải lớn hơn lượng nước cần thiết cho máy chạy:

$$Z_{2t} + R_t - K_t.I + K'_t.I + Z_{3t} \ge \frac{E}{4 \times 0{,}144} \quad \text{với } t = 1 .. 4$$

- Các ràng buộc thụ động:

$$S_t,\ R_t,\ E,\ I \text{ và } K \ge 0$$

Các bài toán qui hoạch tuyến tính có thể giải bằng các phương pháp sau:

☑ Phương pháp đồ giải (*Graphical method*)
☑ Phương pháp đơn hình (*Simplex method*)
☑ Phương pháp đối ngẫu (*Dual method*)

Hiện nay, có rất chương trình máy tính đã được lập sẵn để giúp việc giải các bài toán qui hoạch tuyến tính, ví dụ như phần mềm **QSB** (*Quantitative Systems for Bussiness*) của tác giả Yih-Long Chang và Robert S. Sullian, 1986.

GIẢI BÀI TOÁN QUI HOẠCH TUYẾN TÍNH BẰNG ĐỒ GIẢI

Dùng đồ giải để tìm kết quả cho những bài toán qui hoạch tuyến tính:

- Áp dụng cho những hàm đa biến
- Độ tin cậy phụ thuộc vào sự chi ly của người giải.

Ví dụ thứ 1:

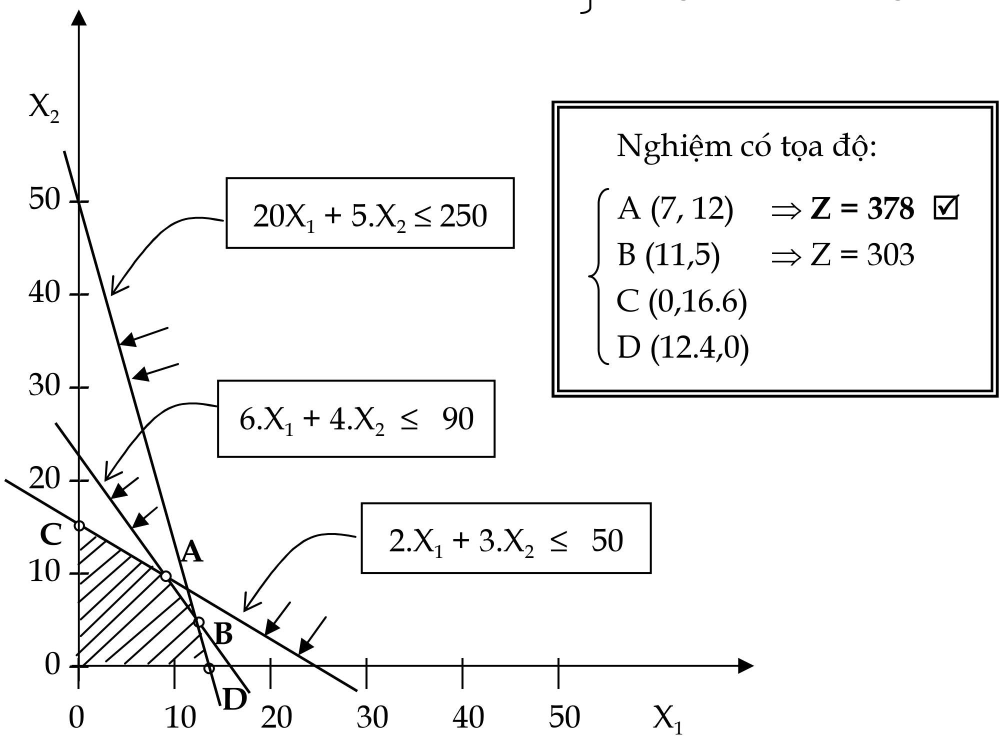
Ẩn số của bài toán X_1 và X_2 (Tấn)

Hàm mục tiêu: max $Z = 18.X_1 + 21.X_2$

Ràng buộc:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{+ Đất:} & 2.X_1 + 3.X_2 \le 50 \\ \text{+ Nhân lực:} & 6.X_1 + 4.X_2 \le 90 \\ \text{+ Nước:} & 20X_1 + 5.X_2 \le 250 \end{array}\right\} \text{Ràng buộc chủ động}$$

$$\left. X_1 \ge 0 \text{ và } X_2 \ge 0 \right\} \text{Ràng buộc thụ động}$$

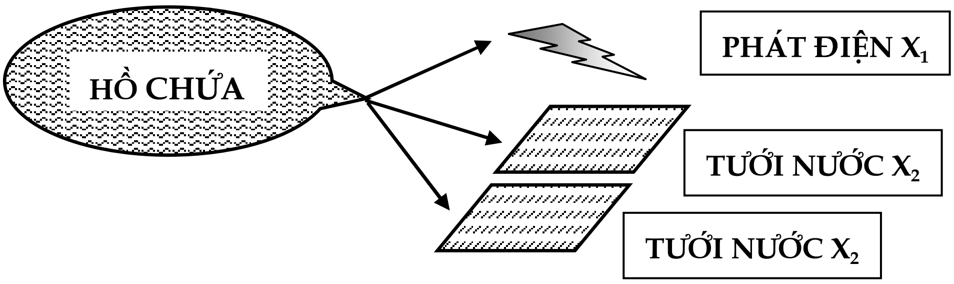


Thế vào bảng kế hoạch sản xuất, ta sẽ có:

Yếu tố sản xuất	Hoa màu (Tấn)		Tài nguyên lớn nhất	Tài nguyên sử dụng
	Bắp (1)	Đậu (2)		
Đất đai (Ha/Tấn)	14	36	50	50 (dùng hết)
Nhân lực (Người - Vụ/Tấn)	42	48	90	50 (dùng hết)
Nguồn nước (10^6 m^3/ Tấn)	140	60	250	200 (dư 50)
Tiền lời (Tr.Đ)	126	252	**Tổng lãi = 378 Tr.Đ**	

GIẢI BÀI TOÁN QUI HOẠCH TUYẾN TÍNH BẰNG PHƯƠNG PHÁP ĐƠN HÌNH (*SIMPLEX METHOD*)

Ví dụ: Một hồ chứa nước mùa khô có dung tích là 8 x 10^6 m^3 nước phục vụ cho 2 mục tiêu là phát điện và tưới. Có 2 khu vực cần cung cấp một lượng nước tưới đồng thời. Do điều kiện công trình, tổng lượng dòng chảy cho tưới không quá 3 x 10^6 m^3 và cho thủy điện không quá 4 x 10^6 m^3. Giá 1 m^3 nước cho tưới là 1,5 \$ và 1 m^3 nước cho phát điện là 2 \$. Tìm giải pháp cấp nước cho 2 công trình có lợi nhất.



Giải:

Gọi X_1 là lượng nước cấp cho điện (x 10^6 m^3)

X_2 là lượng nước cấp cho tưới (x 10^6 m^3) ở 1 khu vực.

Hàm mục tiêu: $Z = 2.X_1 + 2(1,5)X_2 = 2.X_1 + 3.X_2 \rightarrow \max$

Ràng buộc:

$$\left.\begin{array}{l} X_1 \le 4 \\ X_2 \le 3 \\ X_1 + 2X_2 \le 8 \end{array}\right\} \text{chủ động}$$

$$\left.X_1 \ge 0;\ X_2 \ge 0\right\} \text{thụ động}$$

Phương trình có thể viết:

$$\left\{\begin{array}{lll} Z - 2.X_1 + 3.X_2 & = 0 & \\ X_1 + X_3 & = 4 & \\ X_2 + X_4 & = 3 & \\ X_1 + 2X_2 + X_5 & = 8 & \\ Xj & \ge 0; & j = 1, 2, 3, 4, 5 \\ \multicolumn{3}{l}{X_3, X_4, X_5 \text{ là những ẩn số phụ.}} \end{array}\right.$$

Bài toán này ngoài cách giải bằng đồ thị nhưng không chính xác vì còn phụ thuộc vào cách vẽ của người tính và không được tổng quát. Phương pháp đơn hình là 1 tiến trình bao quát chuyển 1 điểm từ cực trị này sang 1 cực trị kế cận có tính ưu việt hơn. Khi không còn điểm cực trị nào mà tính ưu việt cao hơn thì chấm dứt bức tính. Phương pháp này là 1 tiến trình đại số để tìm bài giải tối ưu bằng 1 quá trình thử dần để có kết quả cuối cùng tốt nhất cho mục tiêu.

LẬP BẢNG ĐƠN HÌNH (SIMPLEX TABLEAU): dùng biến giả như biến cơ bản:

Cột chủ chốt

Biến cơ bản	Hàng thứ	Các hệ số của						Phần phải của phương trình
		Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	
Z	0	1	-2	-3	0	0	0	0
X_3	1	0	1	0	1	0	0	4
X_4	2	0	0	1	0	1	0	3
X_5	3	0	1	2	0	0	1	8

Số chủ chốt

Hàng chủ chốt

- Cột chủ chốt (*Pivot column*): xác định bằng cách lấy **giá trị âm nhỏ nhất** của hàng Z.
- Hàng chủ chốt (*Pivot row*): lấy giá **trị dương nhỏ nhất** qua **phép thử tỉ số min** (*minimum ration test*), như sau (lấy phần phải của phương trình chia cho các hệ số trong cột chủ chốt - trường hợp hệ số trong cột chủ chốt là 0 thì gán là 1):

  Lấy $\frac{3}{1} = 3$ (min) ; $\frac{4}{1} = 4$; $\frac{8}{2} = 4$
- Số giao giữa cột chủ chốt và hàng chủ chốt gọi là **số chủ chốt** (*pivot number*)

Nguyên tắc biến đổi trong phương pháp đơn hình:

+ Tìm mọi cách đưa hệ số cột chốt về số 0 (bằng cách nhân hàng chủ chốt với hệ số cột chốt rồi trừ nhau)

+ Hàng chốt giữa nguyên

+ Tiến trình chấm dứt khi mọi hệ số của hàm mục tiêu (Z) bằng 0.

Hàng 0	[	-2	**-3**	0	0	0	0]	
-	[	0	**1**	0	1	0	3]	Hàng chốt x (-3)
Hàng 0 (mới)	[	-2	**0**	0	3	0	9]	

Hàng 1 [1 0 1 0 0 4]

(giữ y nguyên vì hệ số của cột chốt bằng 0)

Hàng 2 [-2 -3 0 0 0 0]

(giữ y nguyên vì đây là hàng chủ chốt)

Hàng 3	[	1	**2**	0	0	1	8]	
-	[	0	**1**	0	1	0	3]	Hàng chốt x (-2)
Hàng 3 (mới)	[	1	**0**	0	-2	1	2]	

Sau khi biến đổi lần thứ 1, ta có bảng mới như sau:

Biến cơ bản	Hàng thứ	Các hệ số của						Phần phải của phương trình
		Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	
Z	0	1	-2	0	0	3	0	9
X_3	1	0	0	1	0	1	0	3
X_4	2	0	1	0	1	0	0	4
X_5	3	0	1	0	0	-2	1	2

Lập lại tiến trình như vậy, ta sẽ có bảng kết quả sau:

Lần thứ	Biến cơ bản	Các hệ số của						Phần phải của phương trình
		Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	
1	Z	1	-2	-3	0	0	0	0
	X_3	0	1	0	1	0	0	4
	X_4	0	0	1	0	1	0	3
	X_5	0	1	2	0	0	1	8
2	Z	1	-2	0	0	3	0	9
	X_3	0	0	1	0	1	0	3
	X_4	0	1	0	1	0	0	4
	X_5	0	1	0	0	- 2	1	2
3	Z	1	0	0	0	- 1	2	13
	X_3	0	1	0	0	- 2	1	2
	X_4	0	0	1	0	1	0	3
	X_5	0	0	0	1	2	- 1	2
4	Z	1	0	0	(1/2)	0	(3/2)	**14**
	X_3	0	1	0	1	0	0	**4**
	X_4	0	0	1	- (1/2)	0	(1/2)	**2**
	X_5	0	0	0	0	2	- 1	2

Nghiệm của bài toán:

$Z^* = 14$
$X_1^* = 4$
$X_2^* = 2$